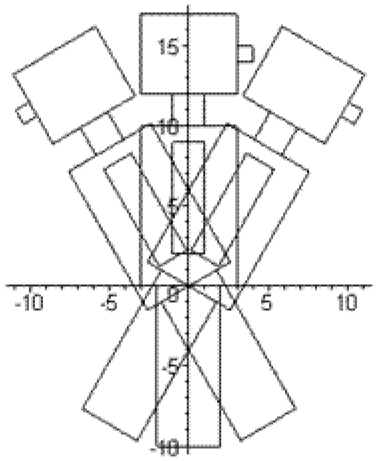
25. APLICACIONES ORTOGONALES. PROPIEDADES.

Un endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es **una aplicación ortogonal** si conserva el producto escalar, es decir, para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \succ = \prec f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}) \succ$$

25.1. LAS APLICACIONES ORTOGONALES CONSERVAN DISTANCIAS Y ÁNGULOS

1. Si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación ortogonal, entonces se verifica que $\|\boldsymbol{x}\| = \|f(\boldsymbol{x})\|$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
2. Si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación ortogonal, entonces se verifica que $\measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \measuredangle(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$



Demostración

1. $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \succ} = \sqrt{\prec f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}) \succ} = \|f(\boldsymbol{x})\|$
2. $\measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \arccos \frac{\prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \succ}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \arccos \frac{\prec f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}) \succ}{\|f(\boldsymbol{x})\|\|f(\boldsymbol{y})\|} = \measuredangle(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$

Por tanto las aplicaciones ortogonales conservan distancias y ángulos.

25.2. MATRIZ DE UNA APLICACIÓN ORTOGONAL

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación ortogonal y sea $A = M(f, B^{on})$ la matriz de la aplicación f respecto de una base ortonormal.

Por la definición de aplicación ortogonal, para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \succ = \prec f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}) \succ$, y pasando a coordenadas respecto de la base B^{on}:

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{t}}\, \boldsymbol{y} = \prec \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \succ = \prec f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}) \succ = \prec A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \succ = (A\boldsymbol{x})^t\, (A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{t}}\, (A^t\, A)\, \boldsymbol{y}$$

De donde se deduce que: $A^t A = I_n$

Por tanto la matriz de una aplicación ortogonal, respecto a una base ortonormal, es una matriz ortogonal.

25.3. CLASIFICACIÓN DE APLICACIONES ORTOGONALES

25.3.1. LOS AUTOVALORES REALES DE UNA MATRIZ ORTOGONAL

Los únicos autovalores reales que puede tener una matriz ortogonal $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son: $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$

Demostración

Si A es ortogonal, λ es un autovalor a A y $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ un autovector asociado a λ, se tiene que:

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \Rightarrow \|A\boldsymbol{u}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{u}\| \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{u}\| \xRightarrow[\|\boldsymbol{u}\|\neq 0]{} |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

25.3.2. EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ ORTOGONAL

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es una matriz ortogonal, entonces su determinante vale 1 o -1.

Demostración

Si A es ortogonal entonces

$$A^tA = I_n \Rightarrow \det(A^tA) = \det(I_n) = 1 \xRightarrow[\det(A^tA)=\det(A^t)\det(A)]{}$$

$$\Rightarrow \det(A^t)\det(A) = 1 \xRightarrow[\det(A^t)=\det(A)]{} \det(A)^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

25.3.3. TIPOS DE MATRICES ORTOGONALES

Se dice que la matriz ortogonal $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ **conserva la orientación** si verifica que $\det(A) = 1$

Se dice que la matriz ortogonal $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ **cambia la orientación** si verifica que $\det(A) = -1$

25.3.4. TIPOS DE APLICACIONES ORTOGONALES

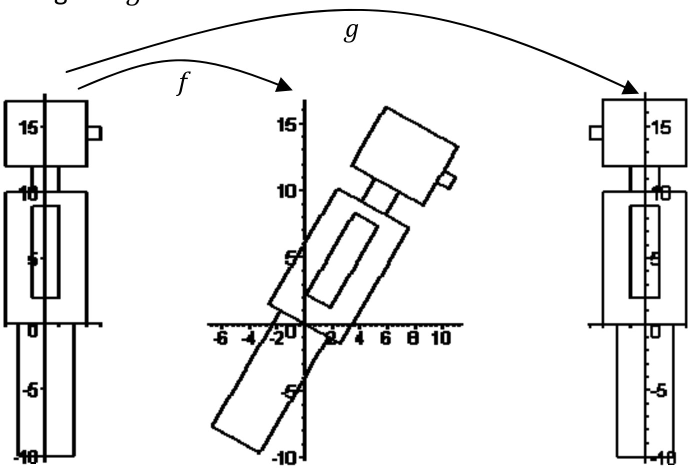
Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación ortogonal y sea $A = M(f, B^{on})$ la matriz de f respecto de una base ortonormal.

Se dice que $\boldsymbol{f}$ **conserva la orientación** si la matriz ortogonal $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ conserva la orientación, es decir si verifica que $\det(A) = 1$

Se dice que $\boldsymbol{f}$ **cambia la orientación** si la matriz ortogonal $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ cambia la orientación, es decir si verifica que $\det(A) = -1$

La aplicación ortogonal f conserva la orientación.

La aplicación ortogonal g cambia la orientación



25.3.5. BASES ORIENTADAS

Una base ortonormal B^{on} de $\mathbb{R}^n$ se dice que está **orientada positivamente**, y se nota por B^{on+}, si tiene la misma orientación que la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir si se verifica que $\det(P) = 1$, siendo $P = \mathcal{C}(B^{on}, B_c^n)$

EJEMPLO 1

Comprobar que las siguientes aplicaciones son ortogonales y estudiar si conservan o cambian la orientación. $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

Solución

Se calcula la matriz de f_1 en base canónica: $A_1 = M(f_1, B_c^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_1^t\, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \det(A_1) = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

De donde se deduce que f_1 es una aplicación ortogonal que conserva la orientación.

Se calcula la matriz de f_2 en base canónica: $A_2 = M(f_2, B_c^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_2^t\, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

De donde se deduce que f_2 es una aplicación ortogonal que cambia la orientación.